LYCEE SECONDAIRE RUE TAIB MHIRI MENZEL – TEMIME			
DEVOIR DE SYNTHESE PREMIER TRIMESTRE			
PROF LEHBECHA CHOKRI	CLASSE 4M1	DATE : 03/12/2019	HO.3H

Exercice1 (4pts)

On considère dans C les équations : $(E): z^3 = 8i$. $(E'): (z-i)^2 = 2i(\overline{z}+i)$

a. Résoudre dans C l'équation (E) et écrire ses solutions sous la forme algébrique.

b. Soit $z \neq i$, montrer que si z est solution de (E') alors $|z-i| = 2$

c. Soit $z \neq i$, montrer que : z solution de (E') équivaut à $z-i$ solution de (E).

d. En déduire sous la forme algébrique les solutions de (E')

Exercice2:(4pts)

n un entier naturel non nul , on considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1.a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$, admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique α_n .

b. Justifier que : $0 < \alpha_n < \frac{2}{3}$, calculer en justifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^n$.

2. a. Montrer que pout tout $x \in [0,1]$, $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

b. En déduire le sens de variation de la suite (α_n)

c. Montrer que la suite (α_n)est convergente puis calculer sa limite .

Exercice 3 :(5pts) (voir figure ci-contre)

Dans le plan orienté, on a : • ABCD carré direct de centre O • BOAE carré direct. • DOCF carré direct

On désigne par J le milieu du segment [BC].

1. a. Caractériser les isométries : $S_{(OC)}oS_{(OJ)}$, $S_{(OJ)}oS_{(DC)}$ et $S_{(OC)}oS_{(DC)}$

b. En déduire la nature et les caractéristiques des isométries : $R(O,\frac{\pi}{2})ot_{\overrightarrow{CB}}$ et $R(O,-\frac{\pi}{2})oR(C,\frac{\pi}{2})$

2. Soit l'application $h=S_{(BD)}o\ R(C,\frac{\pi}{2})$.

a. Déterminer h(C) , h(D) et h(F).

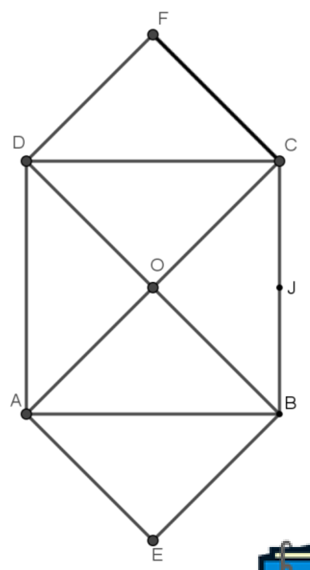
b. Montrer que h n'a pas de points invariants, en déduire la nature de h .

c. Montrer que $h = t_{\overrightarrow{OE}} oS_{(OE)}$.

3. Soit φ l'isométrie tels que $\varphi(D) = E$, $\varphi(O) = B$ et $\varphi(J) = J$

a. Montrer que φ et une rotation et donner son angle.

b. Déduire alors la nature du triangle JDE .



Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux

Exercice 4 (7pts)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

On désigne par ζ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.a. Montrer que pour tout $x\in[0,1[$ $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

b. Montrer que f est bijective de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera

c. Tracer les courbes ζ de f , et ζ' de f^{-1} en précisant la demi -tangente au point d'abscisse 0.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=f(\sin(x))$

a. Montrer que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ $g(x)=\tan(x)$

b. Montrer que la fonction tan est une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$

c. Montrer que $\tan^{-1}$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x\in[0,+\infty[$: $(\tan^{-1})'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

3. Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} h(x)=\tan^{-1}(\frac{1}{x}) & \text{si } x>0 \\ h(0)=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

a. Montrer que h est continue à droite en 0.

b. Montrer que h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer h'(x).

c. Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$: $\tan^{-1}(x)+\tan^{-1}(\frac{1}{x})=\dfrac{\pi}{2}$

e. En déduire alors que h est dérivable à droite en 0 et préciser $h'_d(0)$.

4. On considère les suites (S_n) et (U_n) définie sur IN* par :

- $S_n=\sum\limits_{p=1}^{n}\tan^{-1}(p+1)-\tan^{-1}(p)$
- $U_n=\tan^{-1}(\frac{2}{n})-\tan^{-1}(\frac{1}{n})$

a. Montrer que : $S_n=-\dfrac{\pi}{4}+\tan^{-1}(n+1)$, calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

b. Monter qu'il existe un réel $c_n\in\left]\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n}\right[$ tel que : $nU_n=\dfrac{1}{1+c_n^2}$ calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}nU_n$

c. Montrer que pour tout $n\in N^*$, $0<U_n<\dfrac{\pi}{2}$

d. Montrer que $\tan(U_n)=\dfrac{n}{n^2+2}$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}n\tan(U_n)$.

Fin

On donne la formule $\boxed{\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}}$

Devoir.tn
toutes les matières, tous les niveaux